

Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T.29, S.3 (2013), 197–220

BÀN VỀ KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG LÝ THUYẾT HỆ PHẪNG VÀO PHÂN TÍCH VÀ ĐIỀU KHIỂN HỆ PHI TUYẾN

NGUYỄN DOÃN PHƯỚC

Đại học Bách khoa Hà Nội; Email: phuoc.nguyendoan899@gmail.com

Tóm tắt. Lý thuyết hệ phẳng đã mang lại nhiều cơ hội song cũng không ít thách thức cho việc thực hiện các bài toán điều khiển. Bài báo này tập trung vào việc bàn luận về các cơ hội đó cũng như những vấn đề mở cần phải giải quyết của lý thuyết hệ phẳng, để từ đó có được một cái nhìn khách quan hơn về khả năng ứng dụng hiệu quả lý thuyết hệ phẳng vào phân tích và điều khiển hệ phi tuyến.

Từ khóa. Hệ phẳng, Tương đương Lie-Backlund, Mô hình Brunovsky, Động học tuyến tính hóa phản hồi.

Abstract. Theory of flat systems has provided many opportunities, but not few challenges for solving of analysis and control problems. This article focuses on appreciations of these opportunities and from this ahead on some open theory problems to be carried out. With these appreciations, the paper provides also an objective view of applicability of flat systems theory in analysis and control of nonlinear systems.

Key words. Flat systems, lie-backlund equivalence, brunovsky model, dynamic feedback linearization.

Bảng các ký hiệu

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$: vector hữu hạn chiều của các hàm biến thực $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, trong đó chỉ số T là ký hiệu phép tính chuyển vị của vector hoặc ma trận.

$\mathbf{x}^{(k)}$: đạo hàm bậc k của vector hàm.

\mathbf{U}_p và \mathbf{Y}_q : vector hữu hạn chiều mở rộng của các vector hàm $u, u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$ và $y, y^{(1)}, \dots, y^{(q)}$.

ξ và $\mathcal{F}(\xi)$: vector vô hạn chiều và ánh xạ giữa hai không gian vector vô hạn chiều.

$\frac{\partial}{\partial q}$: đạo hàm Jacobi.

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$: hệ không bị kích thích và có mô hình thay đổi theo thời gian.

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$: hệ có tín hiệu đầu vào \mathbf{u} và mô hình bất biến theo thời gian.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

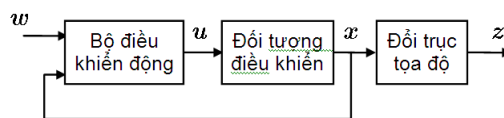
Khái niệm hệ phẳng trên được đưa ra lần đầu bởi Fliess (1989). Nó được đón nhận như một hướng mở cho việc giải quyết các bài toán điều khiển tuyến tính hóa chính xác bằng bộ

điều khiển phản hồi trạng thái động, tức là bộ điều khiển mà bản thân nó cũng có động học biểu diễn bởi đặc tính của các trạng thái riêng trong nó [9, 10, 15, 17, 22]. Một lớp nhỏ của bài toán này là điều khiển tuyến tính hóa chính xác bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái tĩnh, đã được giải quyết khá trọn vẹn nhờ công cụ hình học vi phân [19, 21]. Đặc biệt hơn nữa, lời giải của lớp các bài toán nhỏ này cho hệ MIMO (nhiều vào, nhiều ra) còn đưa đến một hiệu ứng phụ rất đẹp là hệ tuyến tính MIMO thu được có dạng tách kênh gồm nhiều hệ SISO (một vào, một ra) độc lập với nhau. Bởi vậy trong nhiều tài liệu nó còn được gọi là phương pháp điều khiển tách kênh trực tiếp.

Tuy nhiên, những phương pháp điều khiển tuyến tính hóa chính xác bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái tĩnh như vậy lại có các yêu cầu khá chặt chẽ về đối tượng điều khiển, chẳng hạn như đối tượng phải là pha cực tiểu, có tổng các phần tử của vector bậc tương đối tối thiểu bằng bậc của mô hình ... Đặc biệt, đây lại là những giả thiết không bao giờ tạo ra được bằng bộ điều khiển tĩnh, vì với bộ điều khiển phản hồi trạng thái tĩnh ta không thể biến hệ đang là pha không cực tiểu trở thành pha cực tiểu, cũng như không thể làm thay đổi được vector bậc tương đối tối thiểu của đối tượng điều khiển.

Các điều hạn chế này đã dẫn chúng ta một cách hoàn toàn tự nhiên tới hướng nghiên cứu tiếp theo của điều khiển tuyến tính hóa chính xác tĩnh là với lớp các đối tượng không thỏa mãn những giả thiết nêu trên, người ta cần phải bổ sung thêm cho nó những biến trạng thái mới theo cấu trúc truyền ngược, sao cho đối tượng mở rộng đó với các biến trạng thái mới bổ sung thêm này lại thỏa mãn các giả thiết đã được xây dựng trên nền hình học vi phân, để từ đó lại có thể áp dụng được phương pháp tuyến tính hóa chính xác bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái tĩnh.

Một cách nhìn khác cho hướng giải quyết trên là khi ghép chung bộ điều khiển phản hồi trạng thái tĩnh thu được với các biến trạng thái đã bổ sung thêm cho đối tượng ta sẽ có bộ điều khiển phản hồi trạng thái động làm hệ kín trở thành tuyến tính hoặc ít nhất cũng chỉ sai khác hệ tuyến tính ở một phép đổi trực tọa độ (hình 1). Với cách nhìn như vậy, bài toán mở rộng của điều khiển tuyến tính hóa chính xác được đặt ra ở đây là phải xác định bộ điều khiển động, thay cho bộ điều khiển tĩnh và một phép đổi trực tọa độ phi tuyến thích hợp, còn được gọi là phép đổi biến vi phôi (diffeomorphism), để điều khiển tuyến tính hóa chính xác được cho cả những đối tượng phi tuyến pha không cực tiểu hoặc có vector bậc tương đối tối thiểu không bằng bậc của mô hình..., tức là những đối tượng không thỏa mãn các giả thiết cần có của phương pháp đã được xây dựng trên nền hình học vi phân.



Hình 1. Cấu trúc hệ điều khiển tuyến tính hóa chính xác

Từ đây, một câu hỏi đặt ra là ở những đối tượng điều khiển phi tuyến nào sẽ tồn tại bộ điều khiển động để tuyến tính hóa chính xác được cho nó. Tuy rằng người ta chưa xác định được câu trả lời trọn vẹn về điều kiện cần và đủ, song điều kiện đủ để đối tượng phi tuyến pha không cực tiểu hay có vector bậc tương đối tối thiểu không bằng bậc của mô hình vẫn có thể tuyến tính hóa chính xác được là đã có và đó là những hệ phi tuyến phẳng.

1.1. Định nghĩa hệ phẳng

Xét hệ phi tuyến dừng, có m tín hiệu đầu vào u_1, u_2, \dots, u_m , được viết chung lại thành vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ và n trạng thái x_1, x_2, \dots, x_n cũng được viết chung lại thành

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, trong đó T là ký hiệu phép chuyển vị, mô tả bởi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

với $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}))^T$ là vector của các hàm nhiều biến. Hệ (1) sẽ được gọi là phẳng, nếu tồn tại vector hàm (gọi là tín hiệu ra phẳng)

$$\mathbf{y} = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(p)}) = \gamma(\mathbf{x}, \mathcal{U}_p), \quad (2)$$

trong đó

$$\mathcal{U}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$$

với p là một số nguyên dương hữu hạn và

$$\mathbf{u}^{(k)} = \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k}, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

là ký hiệu đạo hàm bậc k của hàm số sao cho từ đó cũng có các phép biến đổi ngược

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(q)}) = \alpha(\mathcal{Y}_q) \\ \mathbf{u} = \beta(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}) = \beta(\mathcal{Y}_r) \end{cases} \quad (3)$$

với q, r cũng là những số nguyên dương hữu hạn cũng như

$$\mathcal{Y}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{qk}$$

là ký hiệu của vector có phần tử cũng là một vector hàm.

Định nghĩa trên được lấy từ [17] và bên cạnh nó còn có một số các định nghĩa khác nữa, chủ yếu là để bổ sung thêm tính nhỏ nhất của các số nguyên dương p, q và r . Chẳng hạn như ở [9] còn có thêm $r \geq q$ và điều kiện độc lập vi phân giữa các hàm $\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(l)}$ có trong (3), tức là giữa chúng không tồn tại một quan hệ đại số $h(?)$ nào thỏa mãn

$$h(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(l)}) = 0 \text{ với } m = 1, 2, \dots, \max\{p, r\}.$$

Ngoài ra ở tài liệu [15] thì còn chi tiết hơn với sự bổ sung

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(q)}) = \alpha(\mathcal{Y}_q) \\ \mathbf{u} = \beta(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(q+1)}) = \beta(\mathcal{Y}_{q+1}) \end{cases} \quad (4)$$

thay cho q và r trong (3).

1.2. Ví dụ về hệ phẳng

Sau đây là một vài hệ phẳng.

1) *Hệ Euler-Lagrange đủ cơ cấu chấp hành*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(1)})}{\partial \mathbf{q}^{(1)}} \right)^T - \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(1)})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial R(\mathbf{q}^{(1)})}{\partial \mathbf{q}^{(1)}} \right)^T = \mathbf{u}, \quad (5)$$

trong đó $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ là vector các biến khớp, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}$ là ký hiệu đạo hàm Jacobi và $L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(1)})$ là hàm Lagrange, là hệ phẳng vì nó có tín hiệu ra phẳng

$$\mathbf{y} = \mathbf{q} \quad (6)$$

thỏa mãn các điều kiện đảo (3), (4)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)})}{\partial \mathbf{y}^{(1)}} \right)^T - \left(\frac{\partial L(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)})}{\partial \mathbf{y}} \right)^T + \left(\frac{\partial R(\mathbf{y}^{(1)})}{\partial \mathbf{y}^{(1)}} \right)^T. \quad (8)$$

Ví dụ này cho thấy tất cả các hệ cơ điện tử, hệ thụ động đủ cơ cấu chấp hành là những hệ phẳng.

2) *Hệ phi tuyến [10]*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 u_2 \\ x_2 u_1 \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

là hệ phẳng vì có tín hiệu ra phẳng

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

thỏa mãn các điều kiện nghịch đảo (3), (4)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1^3} \end{pmatrix}.$$

3) *Mọi hệ phi tuyến truyền ngược chặt dạng chuẩn*

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \text{ khi } 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}) + u \end{cases} \quad (9)$$

với $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ là hệ phẳng với tín hiệu ra phẳng $y = x_1$ vì với nó ta có các quan hệ ngược

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad u = y^{(n)} - f(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}).$$

4) Mọi hệ phi tuyến affine một đầu vào

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x})u \quad (10)$$

mà với nó tồn tại phép đổi biến vi phôi $\mathbf{z} = \mathbf{m}(\mathbf{x})$, tức là một ánh xạ trơn và khả nghịch, biến đổi nó về dạng truyền ngược chặt dạng chuẩn (9)

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} & \text{khi } 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n = \varphi(\mathbf{z}) + u \end{cases} \quad (11)$$

sẽ là hệ phẳng, vì mọi phép biến đổi vi phôi không làm thay đổi tính chất động học của hệ. Điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại phép đổi biến vi phôi $\mathbf{z} = \mathbf{m}(\mathbf{x})$ cũng như phương pháp xác định nó để chuyển hệ affine (10) về dạng (11) đã được trình bày trong các tài liệu tham khảo [19, 21].

5) Thiết bị chỉnh lưu tích cực mô tả bởi [11]

$$\begin{cases} L\dot{z}_d = V_d - 0.5z_c s_d = L\omega z_q \\ L\dot{z}_q = V_q - 0.5z_c s_q = L\omega z_d \\ C\dot{z}_c = 0.75(z_q s_q + z_d s_d) - P/z_c \\ z_e = V_0 - 0.5s_0 z_c - 0.5z_c \end{cases} \quad (12)$$

là thiết bị chuyển đổi điện áp xoay chiều thành một chiều và ngược lại, trong đó $\mathbf{u} = (s_d, s_q, s_0)^T$ là 3 tín hiệu điều khiển van đóng mở (tín hiệu vào), $\mathbf{x} = (z_d, z_q, z_c, z_e)^T$ là các trạng thái. Nhìn từ khía cạnh hệ thống thì thiết bị chỉnh lưu tích cực này là một hệ phẳng với tín hiệu ra phẳng

$$y_1 = 0.75(Lz_d^2 + Lz_q^2) + 0.5Cz_c^2, \quad y_2 = z_q, \quad y_3 = z_e$$

vì với các tín hiệu ra phẳng đó ta có các hàm ngược (3)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z_d \\ z_q \\ z_c \\ z_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\dot{y}_1 + 2P - 3y_2 V_q(3V_d)) \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)})$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} s_d \\ s_q \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2L}{z_c} \left(\frac{\dot{V}_d}{V_d} z_d + \frac{\dot{V}_q}{V_d} \dot{y}_2 + \frac{\dot{V}_q}{V_d} z_q + \frac{V_d}{L} - \frac{2\dot{y}_1}{3V_d} + \omega z_q \right) \\ \frac{2}{z_c} (V_q - L\dot{y}_2 - \omega L z_d) \\ \frac{2}{z_c} (V_0 - y_3) - 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)})$$

trong đó

$$\Psi(y_1, y_2, \dot{y}_1) = 6C[3V_d^2(4y_1 - 3Ly_2^2) - L(2\dot{y}_1 - 3y_2 V_q + 2P)^2].$$

1.3. Tính chất của hệ phẳng

Những tính chất động học của hệ phẳng đã được trình bày chi tiết trong các tài liệu tham khảo [9–16, 17, 22]. Sau đây, một vài tính chất cơ bản nhất trong số đó sẽ được tóm tắt lại dưới dạng dễ chấp nhận hơn trong ứng dụng, bao gồm:

1. Số tín hiệu vào và tín hiệu ra phẳng (2) của hệ phẳng là bằng nhau, tức là $\dim(\mathbf{u}) = \dim(\mathbf{y})$.
2. Mọi hệ phẳng (1) luôn điều khiển tuyến tính hóa chính xác được, tức là luôn tồn tại một bộ điều khiển phản hồi trạng thái (tĩnh hoặc động)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}), & \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p \\ \mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (13)$$

trong đó \mathbf{v} là vector trạng thái, (\mathbf{w}, \mathbf{x}) là các tín hiệu vào của bộ điều khiển và một phép đổi biến vi phân

$$\mathbf{z} = \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n+p}$$

để hệ kín (hình 3) trở thành tuyến tính với mô hình

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{w}. \quad (14)$$

3. Bậc p của bộ điều khiển (13) được gọi là bậc phẳng của hệ phẳng (1). Như vậy mọi hệ phẳng (1) có bậc phẳng bằng 0 sẽ điều khiển tuyến tính hóa chính xác được bằng bộ điều khiển tĩnh phản hồi trạng thái.
4. Nếu hai hệ phẳng cùng điều khiển tuyến tính hóa chính xác được tới một hệ tuyến tính (14) thì chúng được gọi là tương đương với nhau. Số tín hiệu đầu vào của hai hệ phẳng tương đương là bằng nhau.
5. Giữa hai hệ phẳng tương đương nhau luôn tồn tại một bộ điều khiển phản hồi trạng thái và một phép đổi biến vi phân chuyển hệ này sang hệ kia.

1.4. Các vấn đề cần bàn thêm

Khái niệm hệ phẳng và những tính chất cơ bản của nó đã được trình bày. Tuy nhiên còn có nhiều vấn đề đặt ra với lý thuyết hệ phẳng. Chẳng hạn, khi so sánh với các lý thuyết hệ phi tuyến không phẳng khác, sẽ nảy sinh một số câu hỏi như sau:

- Với suy nghĩ ban đầu như thế nào người ta lại có được định nghĩa hệ phẳng và ngoài định nghĩa đó còn có khả năng nào khác để kiểm tra được tính phẳng của một hệ phi tuyến bất kỳ hay không?
- Với khái niệm hệ phẳng thì việc phân tích chất lượng động học của nó, bao gồm xác định điểm cân bằng, kiểm tra tính ổn định Lyapunov, miền ổn định, tính ổn định IOS, tính điều khiển được và quan sát được (với đầu ra phẳng), tính động học không,... có thực hiện được không và nếu được thì sẽ như thế nào?
- Bằng cách áp dụng lý thuyết hệ phẳng, ta có thể bổ sung được gì thêm cho bài toán điều khiển hệ phi tuyến so với các lý thuyết khác, đặc biệt là lý thuyết Lyapunov.

Bài báo này sẽ tập trung trả lời các câu hỏi trên, cụ thể là tìm hiểu nguồn gốc của định nghĩa hệ phẳng, khả năng điều khiển bám, điều khiển tuyến tính hóa chính xác cho hệ phẳng và khả năng ứng dụng lý thuyết hệ phẳng vào phân tích chất lượng hệ phi tuyến.

2. BÀN VỀ KHẢ NĂNG CỦA LÝ THUYẾT HỆ PHẪNG

2.1. Nguồn gốc của định nghĩa hệ phăng

Theo thứ tự thời gian, chỉ sau khi khái niệm hệ phăng được đưa ra bởi Fliess (1989), sau đó hoàn thiện dần với các công trình [9, 15, 17], thì hơn 10 năm sau (1999), quan hệ giữa hệ phăng và phép biến đổi tương đương Lie-Backlund mới được công bố bởi [10]. Tuy nhiên, theo ý của tác giả bài báo này thì mối quan hệ giữa hệ phăng với phép biến đổi tương đương Lie-Backlund mới là điểm mấu chốt cho khả năng điều khiển tuyến tính hóa chính xác hệ phăng cũng như phân tích chúng, do đó nó cũng là điểm quyết định cho khả năng ứng dụng của lý thuyết hệ phăng vào thực tế. Bởi vậy, nguồn gốc ra đời của khái niệm hệ phăng trình bày sau đây sẽ được bố cục lại theo trình tự ngược thời gian để có thể giúp ta hiểu rõ hơn ý nghĩa ứng dụng của lý thuyết mới này.

Trước tiên ta nhớ lại bài toán phân tích và điều khiển hệ phi tuyến kinh điển cho hệ không bị kích thích

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (15)$$

Để khảo sát tính chất động học của hệ (15) này, tức là khảo sát dạng nghiệm $\mathbf{x}(t)$ của nó với điều kiện đầu $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ tùy ý cho trước, mà không cần phải xác định nghiệm đó, người ta đã đưa ra ánh xạ

$$\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t) = \Phi_t^f(\mathbf{x}_0)$$

và phát hiện ra rằng ánh xạ $\Phi_t^f(\mathbf{x}_0)$ đó lại là nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_t^f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\Phi_t^f(\mathbf{x}_0)} \right) \left(\frac{\partial \Phi_t^f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

thỏa mãn điều kiện đầu $\Phi_0^f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Những tính chất cơ bản nhất của $\Phi_t^f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ được trình bày trong [19, 21].

Phát hiện này, cũng như những kết luận khác về tính chất của ánh xạ đó đã được tóm tắt lại trong tài liệu [21], mà đỉnh điểm là các kết luận được rút ra trên nền hình học vi phân thông qua khảo sát không gian tiếp tuyến $\Delta(\mathbf{x})$ của đa tạp $\Phi_t^f(\mathbf{x})$ trong không gian \mathbb{R}^n trình bày ở tài liệu [19], đã đưa ta đến được các phương pháp phân tích tính điều khiển được, quan sát được, tính pha cực tiểu,... và nhất là phương pháp điều khiển tuyến tính hóa chính xác hệ có kích thích dạng affine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (16)$$

trong đó $H(\mathbf{x}) = (\mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{h}_m(\mathbf{x}))$.

Mong muốn sử dụng được cả những thành quả thu được từ ánh xạ $\Phi_t^f(\mathbf{x})$ của hệ không có kích thích (15) cho những hệ có kích thích

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \quad (17)$$

Tài liệu [17] đã sử dụng cấu trúc mô hình Brunovsky để biểu diễn lại hệ có kích thích (17) thành hệ không kích thích trong không gian vô hạn chiều bằng cách xem \mathbf{u} cùng tất cả các đạo hàm cho tới tận bậc vô hạn của nó như những biến trạng thái của hệ

$$\dot{\xi} = \mathcal{F}(\xi(t)) \quad (18)$$

trong đó

$$\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Tuy nhiên, việc sử dụng mô hình Brunovsky một cách tổng quát này lại đẩy tới hậu quả rằng đa tạp tương ứng $\Phi_t^{\mathbf{f}}(\xi)$ mô tả bởi

$$\xi_0 \mapsto \xi(t) = \Phi_t^{\mathcal{F}}(\xi_0)$$

của (18) sẽ có số chiều bằng vô hạn, do đó các kết luận đã có về $\Phi_t^{\mathbf{f}}(x)$ hữu hạn chiều ứng với hệ (15) hữu hạn chiều cũng sẽ không còn hiển nhiên đúng cho $\Phi_t^{\mathcal{F}}(\xi)$. Từ đây, người ta đã tiến thêm một bước nữa là chỉ giới hạn xét các hệ có kích thích (17) tương đương với hệ có mô hình Brunovsky biểu diễn được bằng hình chiếu của nó trong không gian hữu hạn chiều nhờ một phép biến đổi khả nghịch (exogenous tranformation).

Hệ có kích thích (17) bậc n được gọi là tương đương với hệ

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p \quad (19)$$

có mô hình Brunovsky

$$\dot{\zeta} = \mathcal{G}(\zeta(t)) \quad (20)$$

trong đó

$$\zeta = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \mathcal{G}(\zeta) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{w}^{(1)} \\ \mathbf{w}^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

nếu giữa hai mô hình Brunovsky (18) và (20) của chúng tồn tại phép đổi biến khả nghịch (phép biến đổi tương đương Lie-Backlund)

$$\zeta = \Psi(\xi) \iff \xi = \Psi^{-1}(\zeta) = \Phi(\zeta). \quad (21)$$

Chú ý rằng ở hai hệ phi tuyến (17), (19) tương đương bậc vô hạn theo nghĩa (21) như trên không bắt buộc chúng phải có cùng bậc, do đó cũng không bắt buộc phải có cùng số tín hiệu đầu vào.

Ngoài ra, một hệ phi tuyến có kích thích luôn tương đương với chính nó và hai hệ phi tuyến cùng tương đương với hệ thứ ba cũng sẽ tương đương với nhau.

Thu hẹp tiếp, người ta lại giới hạn hệ tương đương (19) của (17) có dạng tuyến tính điều khiển được

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{w}. \quad (22)$$

Khi đó, từ quan hệ tương đương (21) giữa hệ phi tuyến (17) và hệ tuyến tính (22) ta cũng sẽ đến được các công thức định nghĩa (2) và (3) của hệ phẳng.

Bằng việc dẫn dắt định nghĩa hệ phẳng từ tính tương đương Lie-Backlund với hệ tuyến tính điều khiển được như trên, ta thấy được rằng:

- Mọi hệ tuyến tính điều khiển được cũng là hệ phẳng, thậm chí hệ tuyến tính là hệ phẳng khi và chỉ khi nó điều khiển được.
- Tính phẳng của hệ phi tuyến là bất biến với mọi phép đổi trục tọa độ trong không gian trạng thái, do đó cũng bất biến với phép biến đổi vi phối.
- Ở mọi hệ phi tuyến phẳng luôn tồn tại ít nhất một phép biến đổi tương đương (21) để chuyển nó về được thành hệ tuyến tính điều khiển được.
- Mọi hệ phi tuyến phẳng tương đương với nhau theo nghĩa (21) luôn có chung một mô hình tuyến tính hóa chính xác (22).

2.2. Khả năng kiểm tra tính phẳng

Cho tới nay, không có một tiêu chuẩn kiểm tra tính phẳng nào đã được công bố trong [9–15, 17, 22, 26] là có khả năng sử dụng được trong thực tế. Nói cách khác hầu như không có một tiêu chuẩn nào kiểm tra tính phẳng của hệ phi tuyến (17) mà không cần phải đi tìm tín hiệu ra phẳng \mathbf{y} cũng như quan hệ tương đương (21) giữa nó với hệ tuyến tính (22) điều khiển được. Ngay cả trường hợp đơn giản nhất là để chứng minh hệ tuyến tính bậc n một đầu vào, điều khiển được

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (23)$$

là hệ phẳng, người ta cũng phải chỉ ra cụ thể tín hiệu ra phẳng của nó là ([21])

$$\mathbf{y} = (0, \dots, 0, 1)(\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{x}.$$

Ngoài ra, hệ tuyến tính điều khiển được như trên còn là hệ phẳng có dạng mô hình Brunovsky (18) với vector hàm $\mathcal{F}(\xi)$, $\xi = (\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots)^T$ vô hạn chiều thỏa mãn tính chất khá đặc biệt là

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots)$$

nên còn được gọi là hệ phẳng cơ sở (trivial system).

Một cách tổng quát hơn thì hiện nay, để kiểm tra tính phẳng của hệ phi tuyến (17) người ta đều phải đi từ định nghĩa của nó, tức là phải mò mẫm đi tìm tín hiệu ra phẳng \mathbf{y} theo công thức (2) thỏa mãn các điều kiện khả nghịch (3) hoặc (4), chẳng hạn như ở các bài toán ứng dụng lý thuyết hệ phẳng đã công bố trong [1, 7, 11, 18, 20].

Hiển nhiên, việc tìm mò mẫm tín hiệu ra phẳng là không cơ bản và nó giống như việc ta phải đi tìm nghiệm cho một bài toán mà không biết trước được rằng bài toán đó có nghiệm hay không. Nếu may mắn tìm được tín hiệu ra phẳng \mathbf{y} thì ta kết luận được rằng hệ phi tuyến đang khảo sát là hệ phẳng. Ngược lại, nếu không tìm được, ta vẫn không thể biết được hệ có phẳng hay không.

Để gợi ý cho việc đi tìm tín hiệu ra phẳng, các tài liệu [9–15] đã cung cấp một số tính chất của tín hiệu ra phẳng \mathbf{y} , nhưng cũng không có nhiều ý nghĩa ứng dụng, chẳng hạn như các gợi ý rằng số phần tử của tín hiệu ra phẳng phải bằng số tín hiệu vào \mathbf{u} của hệ, hoặc hệ phi tuyến phẳng (17) là hệ tương đương Lie-Backlund với hệ cơ sở, tức là hệ (19) có tín hiệu ra phẳng $\widehat{\mathbf{y}}$ và mô hình Brunovsky (20) của nó thỏa mãn

$$\mathcal{G}(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{y}}^{(1)}, \dots) = (\widehat{\mathbf{y}}^{(1)}, \widehat{\mathbf{y}}^{(2)}, \widehat{\mathbf{y}}^{(3)}, \dots)$$

mà thực chất, như [21] đã chứng minh, nó chính là hệ quả suy ra được từ tính điều khiển được của hệ tuyến tính (22). Những tài liệu nghiên cứu hệ phẳng trên đều chỉ có thể an ủi người sử dụng với nhận định rằng số các hệ phẳng trong thực tế là rất nhiều.

Bởi vậy, việc tìm ra được một tiêu chuẩn cần và đủ để kiểm tra tính phẳng cho hệ phi tuyến mà không cần phải đi xác định tín hiệu ra phẳng \mathbf{y} của nó cũng như không phải đi tìm quan hệ tương đương (21) giữa nó với hệ tuyến tính (22), là bài toán then chốt cần phải được giải quyết ngay, để từ đó có thể thúc đẩy hơn nữa khả năng ứng dụng của lý thuyết hệ phẳng vào thực tế. Ta sẽ gọi đây là bài toán số 1.

Bài toán 1. Xác định điều kiện cần và đủ để kiểm tra tính phẳng của hệ (17) mà không cần phải xác định tín hiệu ra phẳng (2) cho nó. Nói cách khác là phải xác định điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại tín hiệu ra phẳng (2) cho hệ phi tuyến (17).

Công bằng mà nói thì gần đây cũng đã có nhiều nỗ lực để tìm nghiệm bài toán trên, ví dụ như [16] hoặc [17]. Đặc biệt tài liệu [17] đã đưa ra được một số điều kiện kiểm tra tính phẳng cho một số hệ phi tuyến không trôi đặc biệt (driftless systems)

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x})u_i = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{u} \quad \text{với } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T. \quad (24)$$

Tuy nhiên các kết quả đó là không có ý nghĩa vì nó thuần túy chỉ là hoán đổi toán học từ bài toán kiểm tra này sang một bài toán kiểm tra khác. Cụ thể, để kiểm tra tính phẳng cho hệ theo điều kiện cần và đủ được đưa ra trong [16], người ta lại phải kiểm tra tính đóng chặt của ideal trong một đại số giao hoán khác, hoặc cho hệ không trôi (24) có $m = 2$ là tính xoắn của dãy các hàm mở rộng tạo từ $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, $ad_{f_1}f_2(\mathbf{x})$, $ad_{f_1}^2f_2(\mathbf{x})$, ..., trong đó $ad_{f_1}f_2(\mathbf{x})$ là ký hiệu tích Lie, hay còn gọi là ngoặc vuông Lie, của hai vector hàm $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$. Nói cách khác bài toán 1 phát biểu trên hiện vẫn là một bài toán mở.

Tiếp theo, sau khi đã giải quyết được bài toán 1, tức là đã biết được rằng hệ phi tuyến (17) là hệ phẳng thì bước kế tiếp là xác định tín hiệu ra phẳng (2) hoặc hệ tuyến tính tương đương (22) với nó. Đó sẽ là bài toán mở số 2 phát biểu như sau.

Bài toán 2. Cho hệ phi tuyến phẳng (17). Xây dựng thuật toán xác định tín hiệu ra phẳng (2) cũng như mô hình tuyến tính tương đương (22) theo nghĩa (21) giữa hai mô hình Brunovsky của chúng.

Ở đây cũng lại cần chú ý rằng với hệ phi tuyến phẳng (17) có thể có nhiều, thậm chí là vô số tín hiệu ra phẳng (2). Cũng như vậy là với một hệ phi tuyến phẳng (17) có thể tồn tại nhiều, thậm chí là vô số mô hình tuyến tính tương đương (22) cho nó.

2.3. Khả năng điều khiển bám

Theo định nghĩa về hệ phẳng, có thể thấy ngay rằng từ tín hiệu đầu ra mẫu mong muốn \mathbf{y}_m cho trước, ta có thể xác định được tín hiệu đặt ở đầu vào

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_m^{(q+1)}) \quad (25)$$

để đầu ra \mathbf{y} của hệ bám theo được tín hiệu mẫu \mathbf{y}_m mong muốn sau một khoảng thời gian hữu hạn, nếu trong lân cận \mathbf{y}_m hàm $\boldsymbol{\beta}(\cdot)$ là đơn trị, và với

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_m^{(q)}) \quad (26)$$

ta cũng còn xác định được luôn cả tính chất động học của hệ trong chế độ điều khiển bám đó.

Hầu hết các ứng dụng thực tế của lý thuyết hệ phẳng công bố trong [1, 7, 9–18, 20] đều theo hướng sử dụng công thức (25) để xác định tín hiệu đặt đầu vào u của hệ (17) sao cho tín hiệu ra \mathbf{y} của hệ bám theo được tín hiệu mẫu mong muốn \mathbf{y}_m . Đương nhiên rằng khi đó tín hiệu ra \mathbf{y} của hệ cũng phải là tín hiệu ra phẳng, hoặc ít nhất cũng phải xác định được một cách duy nhất từ tín hiệu ra phẳng. Những ứng dụng thực tế có kết quả thành công trong số các ứng dụng trên đều tựu chung một điểm là hệ phi tuyến phải biến đổi không nhanh và tín hiệu vào \mathbf{u} đặt trước đã tìm được phải khả vi ít nhất p lần, cũng như hàm $\beta(\cdot)$ là đơn trị trong lân cận \mathbf{y}_m và mô hình hệ phi tuyến là chính xác. Ở những hệ không thỏa mãn các giả thiết này, ví dụ như ở các ứng dụng trình bày trong [11, 18, 20] cho đối tượng động cơ, hoặc [24] cho hệ thống nhiệt thì khi chỉ áp dụng thuần túy tính chất phẳng (3), hệ thu được đều không có được chất lượng mong muốn, cụ thể là không có được sai lệch $\mathbf{y} - \mathbf{y}_m$ nằm trong dải bị chặn đủ nhỏ cho trước. Với những ứng dụng không thành công đó, người ta đã phải bổ sung thêm rất nhiều các bộ điều khiển cascade khác không liên quan tới nguyên lý phẳng, nhằm cải thiện chất lượng hệ thống. Điều này làm ta phân vân không biết rằng ở thực tế sau này, chất lượng mà hệ thống đã đạt được đó là do ta đã sử dụng nguyên lý hệ phẳng, hay là do các bộ điều khiển cascade bổ sung thêm mang lại. Hơn thế nữa, những ứng dụng [11, 18, 20] này lại hoàn toàn chưa để ý tới các trạng thái \mathbf{x} của hệ trong quá trình điều khiển bám $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_m$, tức là hoàn toàn chưa khẳng định được trong quá trình bám đó sai lệch trạng thái

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_m = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_m^{(q)}) \quad (27)$$

của hệ cũng có tắt dần hay không.

Về phương diện lý thuyết, các tài liệu [15, 17] đã đề xuất nguyên lý chung để thiết kế bộ điều khiển bù sai lệch trên cơ sở phân tích chuỗi Taylor của các hàm $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ và $\beta(\cdot)$ trong (3). Từ nguyên lý chung đó, bài báo này sẽ giới thiệu một phương pháp cụ thể để thiết kế bộ điều khiển bù sai lệch mô hình như sau. Để tiện cho việc trình bày, ta sẽ sử dụng lại ký hiệu các vector mở rộng

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(q)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_m^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^{(q)} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Khi đó tín hiệu điều khiển \mathbf{u}_m cần có ở đầu vào để hệ phẳng (17) với đầu ra phẳng \mathbf{y} bám theo được quỹ đạo \mathbf{y}_m mong muốn sẽ được xác định từ (3) như sau

$$\mathbf{u}_m = \beta(\mathcal{Y}_m). \quad (29)$$

Tuy nhiên, như đã nói, do mô hình của hệ là không chính xác, hoặc các giả thiết về tính khả vi p, q lần của \mathbf{u}_m và \mathbf{y}_m không được thỏa mãn, nên mặc dù đã có \mathbf{u}_m ở đầu vào song ở đầu ra của hệ lại vẫn có $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}_m$. Bởi vậy ta cần phải bù thêm ở đầu vào một lượng tương ứng với sai lệch ở tín hiệu ra này. Lượng dư thừa cần bù đó được tính xấp xỉ như sau

$$\beta(\mathcal{Y}) - \mathbf{u}_m \approx \beta(\mathcal{Y}_m) + \left. \frac{\partial \beta(\mathcal{Y})}{\partial \mathcal{Y}} \right|_{\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_m} (\mathcal{Y} - \mathcal{Y}_m) - \mathbf{u}_m = \mathbf{r}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_m),$$

trong đó

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_m) = \left. \frac{\partial \beta(\mathcal{Y})}{\partial \mathcal{Y}} \right|_{\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_m} (\mathcal{Y} - \mathcal{Y}_m), \quad (30)$$

Hình 2 mô tả hệ điều khiển bám được xây dựng theo nguyên lý phẳng. Ta có thể thấy ngay rằng chất lượng bám của hệ hoàn toàn phụ thuộc vào độ chính xác của tín hiệu bù (30), tức là phụ thuộc vào sai lệch $\mathbf{y} - \mathbf{y}_m$ có đủ nhỏ hay không để có thể bỏ qua được tất cả các đạo hàm bậc cao trong chuỗi Taylor của $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{y})$. Từ đây và cũng rất tự nhiên, ta đi đến bài toán mở thứ 3 như sau.

Bài toán 3. Với tín hiệu đầu ra \mathbf{y}_m mong muốn nào, cũng như từ trạng thái đầu \mathbf{x}_0 như thế nào của hệ phẳng (17) thì hệ thống điều khiển ở hình 2 sẽ có được đồng thời cả $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_m$ và $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_m$, trong đó \mathbf{x}_m được xác định từ \mathbf{y}_m theo (27).

2.4. Khả năng điều khiển tuyến tính hóa

Điều khiển tuyến tính hóa bằng phản hồi trạng thái, hay vẫn thường được gọi là điều khiển tuyến tính hóa chính xác, là điều được kỳ vọng nhất của lý thuyết hệ phẳng khi ứng dụng để giải quyết các bài toán điều khiển hệ phi tuyến. Nó được xem như là sự mở rộng của phương pháp điều khiển tuyến tính hóa chính xác đã được xây dựng trên nền hình học vi phân [19]. Sự khác nhau giữa hai phương pháp này là trong khi phương pháp tuyến tính hóa chính xác trên nền hình học vi phân chỉ áp dụng được cho lớp các hệ phi tuyến pha cực tiểu, có vector bậc tương đối bằng bậc của mô hình và bộ điều khiển phản hồi trạng thái thu được là bộ điều khiển tĩnh

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \quad (31)$$

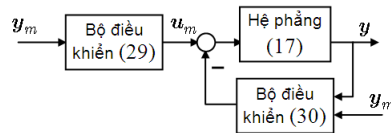
thì ở phương pháp trên nền nguyên lý hệ phẳng, nó có thể áp dụng được cho cả những hệ phi tuyến pha không cực tiểu, hoặc không cần có vector bậc tương đối tối thiểu đúng bằng bậc mô hình, miễn rằng hệ phi tuyến đó là phẳng. Bộ điều khiển trạng thái tuyến tính hóa chính xác thu được thường là một khâu động học có vector trạng thái \mathbf{v} riêng, mô tả bởi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (32)$$

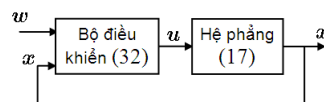
trong đó (\mathbf{w}, \mathbf{x}) là hai vector tín hiệu vào và \mathbf{u} là vector tín hiệu ra của bộ điều khiển.

Cùng với bộ điều khiển (32) trên, hệ phi tuyến phẳng (17), tức hệ phi tuyến tương đương Lie-Backlund với hệ tuyến tính (22) theo nghĩa (21), sẽ tạo thành một hệ kín ở hình 3 mô tả bởi

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x})) \\ \mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \\ \widehat{\mathbf{r}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (33)$$



Hình 2. Điều khiển bám theo nguyên lý phẳng



Hình 3. Điều khiển tuyến tính hóa chính xác

có vector trạng thái là (\mathbf{x}, \mathbf{v}) và hệ kín này chỉ sai khác so với hệ tuyến tính (22) bằng một phép đổi trục tọa độ phi tuyến (đổi biến vi phối)

$$\mathbf{z} = \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (34)$$

Mặc dù biết rằng đó là khả năng ứng dụng được kỳ vọng nhất của lý thuyết hệ phẳng, song việc triển khai nó thành phương pháp tổng quát gần như bị bế tắc. Các ví dụ ứng dụng lý thuyết hệ phẳng vào điều khiển tuyến tính hóa chính xác cho một số đối tượng thực tế cụ thể, giới thiệu trong [1, 15], mặc dù rất ít, nhưng cũng đã không lý giải được chặt chẽ cho sự hình thành bộ điều khiển động phản hồi trạng thái (32) sử dụng ở đó.

Lý do cho sự bế tắc trên có thể được giải thích từ nguồn gốc định nghĩa hệ phẳng đã trình bày ở Mục 2.1 và quan hệ cấp thứ dưới nó. Ở đó ta đã được thấy sự tồn tại của bộ điều khiển phản hồi trạng thái (32) được bắt nguồn từ quan hệ tương đương (21) với hệ tuyến tính (22) của hệ phẳng (17). Ở đó ta cũng đã được thấy thêm rằng khái niệm hệ phẳng với hai công thức (2), (3) cũng có nguồn gốc từ chính quan hệ này. Song quan hệ cấp thứ bên dưới trực tiếp giữa hai công thức định nghĩa (2), (3) với bộ điều khiển (32) lại chưa có. Bởi vậy để có được bộ điều khiển (32), theo nguyên tắc, người ta lại phải lần ngược quan hệ tương đương Lie-Backlund (21) từ công thức định nghĩa (2) và (3), mà điều này đòi hỏi đã phải biết trước hệ tuyến tính (22) tương đương, rồi từ đó mới có được bộ điều khiển (32). Việc này được ví giống như hiện tượng chưa tìm nghiệm bài toán mà đã có được nghiệm đó.

Vậy để khai thông bế tắc của ứng dụng lý thuyết hệ phẳng vào điều khiển tuyến tính hóa chính xác như đã trình bày ở trên, ta phải giải quyết được bài toán mở thứ 4 như sau.

Bài toán 4. Hãy xác định quan hệ giữa hai công thức định nghĩa hệ phẳng (2), (3) và bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác (32), tức là tìm quan hệ qua lại giữa các vector hàm $\gamma(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ và $\mathbf{r}(\cdot)$, $\mathbf{h}(\cdot)$.

Nếu bài toán số 4 trên được giải quyết ta sẽ có được công cụ hỗ trợ việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái động (32) làm hệ kín ở hình 3 với mô hình (33) trở thành tuyến tính hoặc ít nhất chỉ sai khác so với hệ tuyến tính bằng một phép đổi biến vi phối.

Ở đây ta phải nhấn mạnh rằng tất cả những hệ phẳng đặc biệt mà ở đó đã có thể điều khiển tuyến tính hóa chính xác được bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái tĩnh (31), được thiết kế nhờ phương pháp điều khiển đã biết trên nền hình học vi phân, giới thiệu trong các tài liệu [19, 21], thì đương nhiên sẽ không còn cần tới lời giải của bài toán số 4 này. Một số công trình nghiên cứu sau này về lớp hệ trên theo hướng lý thuyết hệ phẳng, chẳng hạn như [4] mà ở đó chúng được gọi là lớp hệ phẳng bậc 0 (0-flat), theo ý tác giả bài báo là hoàn toàn vô nghĩa và không mang lại đóng góp mới, vì các bài toán phân tích cũng như điều khiển lớp hệ đó đã được giải quyết trọn vẹn nhờ công cụ hình học vi phân [19].

Nói cách khác, sẽ là trở nên thừa tới mức không cần thiết, nếu ta lại áp dụng nguyên lý hệ phẳng để tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái động (32) phục vụ điều khiển tuyến tính hóa chính xác cho những hệ này. Chẳng hạn với tất cả các hệ có mô hình Euler-Lagrange đủ cơ cấu chấp hành (xem tài liệu [21]), hoặc mọi hệ phẳng có một tín hiệu vào u , tức là mọi hệ phẳng (17) có $m = 1$ (tài liệu [5]), thì do chúng đã điều khiển tuyến tính hóa chính xác được bằng bộ điều khiển tĩnh (31), sẽ trở nên rất vô lý nếu ta lại áp dụng tiếp nguyên lý hệ phẳng, mà cụ thể là áp dụng lời giải của bài số 4 trên, để thiết kế thêm bộ điều khiển phản hồi trạng thái động (32) cho chúng. Điều lưu ý này là không thừa vì gần đây đã có khá nhiều công trình công bố phạm phải sai lầm trên, ví dụ như [1, 3, 11, 20].

2.5. Khả năng ứng dụng trong phân tích chất lượng hệ thống

Công việc khảo sát chất lượng động học hệ phẳng (17) được thực hiện chủ yếu dựa trên mô hình ngược (3) của tín hiệu ra phẳng

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(q)}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathcal{Y}), \quad (35)$$

nó cho phép ta xác định được khá đơn giản các tính chất cơ bản của quỹ đạo trạng thái \mathbf{x} khi biết trước \mathbf{y} cùng các đạo hàm bậc cao của nó. Chẳng hạn để kiểm tra tính pha cực tiểu của hệ phẳng, ta chỉ cần kiểm tra

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(q)}) = \mathbf{0}$$

có được thỏa mãn hay không.

Cũng như vậy, để kiểm tra tính quan sát được của hệ phẳng (17) khi tín hiệu ra phẳng \mathbf{y} của nó cho bởi (2) là đo được, thì với (35), ta thấy do $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ là ánh xạ từ $\mathbb{R}^{m \times (q+1)}$ vào \mathbb{R}^n , nên theo định nghĩa “hệ (17) được gọi là quan sát đều được nếu với mọi $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ luôn có $\mathcal{Y} \neq \mathcal{Y}'$ ”, hệ phẳng với tín hiệu ra phẳng đo được sẽ là quan sát đều được nếu có $m \times (q+1) \geq n$ và $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ là song ánh (bijective). Tuy nhiên phát biểu trên chỉ là điều kiện đủ và hơn nữa chưa trả lời được câu hỏi về tính quan sát được (không đều) của hệ phẳng. Các nghiên cứu trong [15, 26] còn bỏ ngỏ câu hỏi này.

Hệ phi tuyến phẳng (17) sẽ được gọi là quan sát được (có thể không đều) nếu ở đó luôn tồn tại ít nhất một tín hiệu vào \mathbf{u} (tín hiệu universal), sao cho khi có $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ luôn có $\mathcal{Y} \neq \mathcal{Y}'$. Với định nghĩa như vậy, hiển nhiên để trả lời câu hỏi về tính quan sát được của hệ phẳng một cách tổng quát, bên cạnh quan hệ (35) ta còn phải nghiên cứu thêm về mối liên quan giữa $\boldsymbol{\gamma}(\cdot)$ và $\boldsymbol{\beta}(\cdot)$ với tín hiệu vào \mathbf{u} . Vậy bài toán mở thứ 5 được phát biểu như sau.

Bài toán 5. Xây dựng điều kiện cần và đủ về mối quan hệ giữa $\boldsymbol{\gamma}(\cdot)$, $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ và $\boldsymbol{\beta}(\cdot)$ để hệ phẳng (17) là quan sát được.

Chú ý rằng ở các lý thuyết hệ phi tuyến khác ta đã có đầy đủ tiêu chuẩn kiểm tra tính quan sát được cho hệ phi tuyến, chẳng hạn như với hệ phi tuyến affine (16) là tiêu chuẩn được xây dựng trên nền hình học vi phân giới thiệu trong tài liệu [19, 21]. Bởi vậy để chỉ ra được khả năng của lý thuyết hệ phẳng trong ứng dụng ít nhất không thua kém so với các lý thuyết không phẳng khác, ta cần phải giải quyết được bài toán này.

Nếu giải quyết được bài toán số 5 trên, ta sẽ biết được từ mô hình hệ phẳng có tồn tại hay không bộ quan sát cho nó. Tuy nhiên cũng không nên nhầm lẫn rằng hệ phải là quan sát được ta mới có được bộ quan sát trạng thái cho nó. Với những hệ tuyến tính hoặc phi tuyến không quan sát được, nhưng phát hiện được (detectable), ta vẫn có được bộ quan sát trạng thái cho nó theo nghĩa bộ quan sát đó vẫn tạo ra được $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ thỏa mãn $\widehat{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{x}(t)$, trong đó $\mathbf{x}(t)$ là trạng thái thực của hệ. Song ở các hệ chỉ phát hiện được thì ta chỉ có thể có được

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$$

tức là các bộ quan sát này cần phải có thời gian quan sát là vô hạn hoặc không thể thay đổi được tốc độ tiệm cận về 0 của sai số quan sát, được hiểu là

$$\mathbf{e}(t) = \widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t).$$

Ví dụ hệ tuyến tính

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \quad (36)$$

có A là ma trận bền (hệ ổn định tiệm cận) thì mặc dù cặp ma trận (A, C) không quan sát được, song ta vẫn có được bộ quan sát tiệm cận cho nó

$$\frac{d\widehat{\mathbf{x}}}{dt} = A\widehat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} \quad (37)$$

vì với bộ quan sát (37) ta vẫn có sai lệch quan sát $\mathbf{e} = \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ biểu diễn bởi $\dot{\mathbf{e}} = A\mathbf{e}$ thỏa mãn $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$ và $|\mathbf{e}(t)| < \infty$. Hơn nữa ta còn thấy mặc dù (37) là bộ quan sát không điều chỉnh được (not tunable observer), nhưng nó lại là bộ quan sát theo hàm mũ (exponential observer).

Như vậy, nếu chỉ quan tâm tới bài toán xây dựng bộ quan sát tiệm cận cho hệ phẳng, ta cần phải xác định xem bộ quan sát đó có tồn tại hay không, tức là phải tìm nghiệm của bài toán mở thứ 6 phát biểu như sau.

Bài toán 6. Khi nào thì hệ phẳng (17) là phát hiện được?

Cuối cùng, những tính chất động học khác chỉ liên quan tới quan hệ giữa vector tín hiệu vào \mathbf{u} và trạng thái \mathbf{x} của hệ thì còn hoàn toàn bỏ ngỏ trong lý thuyết hệ phẳng, hoặc nếu có đề cập tới thì cũng chỉ trên những hệ phẳng cụ thể trong thực tế. Đó là các tính chất ổn định Lyapunov, tính điều khiển được,... Ta đi đến bài toán mở thứ 7 là bài toán gốc cho bài toán phân tích tính ổn định và điều khiển được của hệ phẳng như sau.

Bài toán 7. Có tồn tại số tự nhiên s hữu hạn hay không, để có

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(s)}) \quad (38)$$

và nếu có thì quan hệ qua lại giữa vector hàm $\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$ với $\boldsymbol{\gamma}(\cdot)$, $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$, $\boldsymbol{\beta}(\cdot)$ còn lại đã có của hệ phẳng (17) là như thế nào?

Hiển nhiên trong trường hợp $\boldsymbol{\beta}(\cdot)$ khả nghịch ta có ngay câu trả lời $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\beta}^{-1}$ cho bài toán số 6 trên, song đáng tiếc giả thiết này lại thường không được thỏa mãn. Ngoài ra, có thể thấy thêm rằng, nếu đã có quan hệ (38) trên, ta còn có thể phân tích không những tính ổn định tiệm cận Lyapunov mà còn cả tính ổn định với khoảng thời gian hữu hạn của hệ.

3. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

3.1. Tuyến tính hóa chính xác hệ Euler-Lagrange

Ta đã được biết hệ Euler-Lagrange (5) là hệ phẳng. Hệ này còn có dạng mô hình tương đương biểu diễn trong không gian các biến khớp \mathbf{q} như sau ([21])

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (39)$$

trong đó $D(\mathbf{q})$ là ma trận đối xứng xác định dương

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} D(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

là ma trận đối xứng lệch và $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ là vector tham biến của mô hình.

Tín hiệu ra phẳng của hệ phẳng (39) được giữ nguyên theo định nghĩa (6). Các quan hệ ngược (7) và (8) khi đó được viết lại theo dạng tương ứng với mô hình (39) là

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^{(1)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}) \quad \text{và} \quad \mathbf{u} = D(\mathbf{y})\ddot{\mathbf{y}} + C(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}).$$

Do (39) là hệ phẳng nên nó sẽ điều khiển tuyến tính hóa chính xác được bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái và một phép đổi biến vi phân. Ở trường hợp hệ Euler-Lagrange (39) này ta không cần đến phép đổi biến vi phân, mà chỉ cần sử dụng bộ điều khiển phản hồi trạng thái (tĩnh)

$$\mathbf{u} = D(\mathbf{q})\mathbf{w} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (40)$$

Với bộ điều khiển này hệ kín (hình 3) trở thành tuyến tính dạng tích phân bậc hai

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} = D(\mathbf{q})\mathbf{w} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{w} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

trong đó I là vector đơn vị của \mathbb{R}^n . Như vậy bộ điều khiển (40) đã tuyến tính hóa chính xác hệ Euler-Lagrange (39) trong toàn bộ không gian các biến khớp.

Tuy nhiên, có thể thấy rằng không phải cho tới khi có lý thuyết hệ phẳng ta mới có được bộ điều khiển (40) để tuyến tính hóa chính xác hệ Euler-Lagrange. Cụ thể hơn, nếu nhìn lại bộ điều khiển (40) này thì có thể dễ nhận được ngay nó chính là một phần của bộ điều khiển PD bù trọng trường quen biết vẫn thường được dùng để điều khiển bám quỹ đạo \mathbf{q}_d đặt trước cho hệ Euler-Lagrange (xem [21]).

Chẳng hạn như đối với hệ cầu treo ba bậc tự do được xét trong tài liệu [14], ta có thể dễ dàng điều khiển nó bám theo được quỹ đạo mẫu tùy ý cho trước bằng bộ điều khiển PD bù trọng trường mà không cần phải sử dụng tới tính chất phẳng của nó như [14] đã làm. Do đó có thể nói, vai trò tính phẳng của hệ Euler-Lagrange (39) ở đây đã không đóng góp được gì thêm cho sự phát triển các phương pháp điều khiển lớp các hệ này.

3.2. Tuyến tính hóa chính xác hệ phi tuyến affine

Hệ truyền ngược chặt dạng chuẩn (9) là hệ phẳng có tín hiệu ra phẳng là $y = x_1$, do đó theo lý thuyết hệ phẳng nó sẽ tuyến tính hóa chính xác được thành

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}w \quad (41)$$

bằng một bộ điều khiển phản hồi trạng thái (32) và một phép đổi biến vi phân (34).

Song có thể thấy từ cấu trúc đặc biệt của hệ (9) mà gần như là hiển nhiên rằng nếu ta thay

$$f(\mathbf{x}) + u = -a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n + w \Leftrightarrow u = -f(\mathbf{x}) - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n + w \quad (42)$$

trong đó a_0, a_1, \dots, a_n là hằng số tùy chọn, ta sẽ có ngay mô hình tuyến tính (41) với phép đổi biến đơn vị $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, cũng như

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mà không cần biết hệ (9) có phẳng hay không. Như vậy bộ điều khiển phản hồi trạng thái (42) để điều khiển tuyến tính hóa chính xác hệ truyền ngược chặt dạng chuẩn (9) thành (41), là có ngay được từ cấu trúc hệ truyền ngược, chứ không cần phải đợi tới khi có lý thuyết hệ phẳng.

Từ đây và mở rộng ra ta sẽ thấy là với những kết luận cho sự tồn tại phép đổi biến vi phân $\mathbf{z} = \mathbf{m}(\mathbf{x})$ cũng như phương pháp xác định nó đã được xây dựng trên nền hình học vi phân [19], để chuyển hệ affine (10) về dạng truyền ngược chặt (11), ta cũng có ngay được bộ điều khiển tuyến tính hóa cho hệ affine một đầu vào (10) dạng tổng quát mà hoàn toàn không cần tới lý thuyết hệ phẳng. Nói cách khác, tất cả những cố gắng áp dụng lý thuyết hệ phẳng vào điều khiển hệ phi tuyến một đầu vào sau này đều chỉ có nghĩa hàn lâm hóa vấn đề chứ thực chất hoàn toàn không có một đóng góp mới nào cho việc cải thiện chất lượng điều khiển hiện tại.

Một ví dụ khác minh họa cho kết luận trên là nội dung tài liệu tham khảo [3]. Sau phần trình bày chung về lý thuyết hệ phẳng, khả năng điều khiển bám và tuyến tính hóa chính xác cho hệ phẳng, bài báo này đã ứng dụng lý thuyết đó vào hệ hấp dẫn Levitation có mô hình

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{ku^2}{m(c-x_1)^2} - g \end{cases} \quad (43)$$

Bài báo chỉ rằng hệ Levitation (43) này có tín hiệu ra phẳng là $y = x_1$ để rồi từ đó xác định tín hiệu điều khiển bám theo tín hiệu mẫu y_m

$$u_f = (c - x_1) \sqrt{\frac{m}{k}(\ddot{y} - a_1(x_2 - y_m) - a_0(x_1 - y_m) - g)}. \quad (44)$$

Rõ ràng tất cả những công việc đó là rườm rà và không cần thiết, vì hệ Levitation (43) là hệ truyền ngược chặt nên ta đưa nó ngay được về dạng tuyến tính bằng bộ điều khiển tĩnh (42) và đó cũng chính là bộ điều khiển phẳng (44) của bài báo.

Ngoài việc điều khiển bám, bài báo [3] còn xét đến tính bền vững của chất lượng bám khi hệ có tham số hằng k là bất định. Để đánh giá chất lượng bền vững đó, bài báo thay k trong (44) bằng một hằng số mẫu k_0 rồi đánh giá sai lệch bám nhờ khảo sát mô hình động học của sai lệch, lúc này có dạng là phương trình vi phân tuyến tính bậc 3. Có thể thấy việc làm này hoàn toàn không liên quan gì tới lý thuyết hệ phẳng và cũng không góp phần đưa được lý thuyết hệ phẳng vào thực tế như mong đợi.

3.3. Điều khiển thiết bị bay PVTOL

Điều khiển thiết bị bay nói chung hiện đang là bài toán được quan tâm nhiều trong lĩnh vực điều khiển phi tuyến, đặc biệt là các thiết bị có khả năng cất và hạ cánh thẳng đứng [1, 10, 17].

Thiết bị bay PVTOL (planar vertical takeoff and landing) là một trong các thiết bị có khả năng cất và hạ cánh như trực thăng. Mô hình thiết bị bay PVTOL có dạng

$$\begin{cases} \dot{x}_k = x_{k+3}, \quad k = 1, 2, 3 \\ \dot{x}_4 = -u_1 \sin x_3 + \varepsilon u_2 \cos x_3 \\ \dot{x}_5 = u_1 \cos x_3 + \varepsilon u_2 \sin x_3 - 1 \\ \dot{x}_6 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -u_1 \sin x_3 + \varepsilon u_2 \cos x_3 \\ \ddot{x}_2 = u_1 \cos x_3 + \varepsilon u_2 \sin x_3 - 1 \\ \ddot{x}_3 = u_2 \end{cases} \quad (45)$$

trong đó x_1 là đoạn đường đi được của vật bay theo phương thẳng đứng, x_2 là theo phương nằm ngang, x_3 là góc nghiêng của vật so với phương nằm ngang và $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ là các tín hiệu điều khiển.

So với hai ví dụ nêu trên thì có lẽ ở đây, trong bài toán điều khiển hệ PVTOL (45) này, vai trò lý thuyết hệ phẳng mới được thể hiện rõ nét, mặc dù chất lượng điều khiển mà nó mang lại, so với các phương pháp điều khiển khác là chưa nhiều, đặc biệt khi mà bài toán điều khiển bị ràng buộc thêm các điều kiện giới hạn cho tín hiệu điều khiển \mathbf{u} và vector trạng thái \mathbf{x} (xem các phương pháp điều khiển trong tài liệu [8]). Tính đặc biệt trong bài toán điều khiển hệ PVTOL nằm ở chỗ là hệ PVTOL chỉ điều khiển tuyến tính hóa chính xác được bằng bộ điều khiển động.

Hệ PVTOL (45) trên là hệ phẳng. Điều này đã được chứng minh trong [10, 17] bằng cách ở đó họ đã chứng minh rằng

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \varepsilon \sin x_3 \\ x_2 + \varepsilon \cos x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 - x_1 = -\varepsilon \sin x_3 \\ y_2 - x_2 = \varepsilon \cos x_3 \end{pmatrix} \quad (46)$$

là tín hiệu ra phẳng của hệ. Từ tín hiệu ra phẳng này, tài liệu [10, 17, 21] cũng đã chỉ ra các công thức hàm ngược (3) cho ba phần tử đầu tiên x_1, x_2, x_3 trong vector trạng thái $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T$ là

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}) = y_1 + \varepsilon \frac{y_1^{(2)}}{\sqrt{(y_1^{(2)})^2 + (y_2^{(2)} + 1)^2}}, \\ x_2 &= \alpha_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}) = y_2 + \varepsilon \frac{y_2^{(2)} + 1}{\sqrt{(y_1^{(2)})^2 + (y_2^{(2)} + 1)^2}}, \\ x_3 &= \alpha_3(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}) = \arctan \frac{y_2^{(2)} + 1}{y_1^{(2)}}, \end{aligned} \quad (47)$$

Các hàm ngược $\alpha_k(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)})$, $k = 4, 5, 6$ cho ba phần tử còn lại x_4, x_5, x_6 sẽ thu được bằng cách đạo hàm hai vế của (47) theo thời gian. Thay tiếp những hàm ngược này vào mô hình (45) của hệ ta thu được hai hàm ngược $\beta_i(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}), \mathbf{y}^{(4)}$, $k = 1, 2$ cho hai tín hiệu vào

$$\begin{aligned} u_2 &= \beta_2(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}), \mathbf{y}^{(4)} = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial \alpha_6}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} \mathbf{y}^{(i+1)}, \\ u_1 &= \beta_1(\mathbf{y}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}), \mathbf{y}^{(4)} = \frac{1}{\sin \alpha_3} \left[\beta_2 \cos \alpha_3 - \sum_{i=0}^3 \frac{\partial \alpha_4}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} \mathbf{y}^{(i+1)} \right]. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, mặc dù đã chứng minh được hệ PVTOL (45) là hệ phẳng bằng cách sử dụng trực tiếp định nghĩa về hệ phẳng, song tất cả các tài liệu [10, 17] đều không lý giải hay đưa ra bất cứ một lập luận nào cho sự hình thành công thức (46) của tín hiệu ra phẳng, cũng như ngoài công thức đó còn có các tín hiệu ra phẳng nào nữa không. Điều đó gây cho ta cảm giác

rằng tín hiệu ra phẳng (46) có vẻ như được mò mẫm tìm ra. Đó cũng chính là vấn đề đã được nêu lên ở bài toán mở số 1.

Tiếp theo, để điều khiển tuyến tính hóa chính xác hệ PVTOL này, tài liệu [17] đã chỉ ra rằng hệ PVTOL (45) đó là tương đương Lie-Backlund với hệ tuyến tính bậc 8

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+2}, & i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \dot{z}_7 = w_1 \\ \dot{z}_8 = w_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1^{(4)} = w_1 \\ z_2^{(4)} = w_2 \end{cases} \quad (48)$$

có vector trạng thái $z = (z_1, z_2, \dots, z_8)^T$ và hai tín hiệu vào $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$, theo nghĩa (21), tức là giữa hai mô hình Brunovsky của chúng

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \mathcal{F}(\xi(t)) \quad \text{với} \quad \xi = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_{k+3}, & k = 1, 2, 3 \\ -u_1 \sin x_3 + \varepsilon u_2 \cos x_3 \\ u_1 \cos x_3 + \varepsilon u_2 \sin x_3 - 1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

với $k = 1, 2, 3$ cho hệ PVTOL (45) và

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = \mathcal{G}(\zeta(t)) \quad \text{với} \quad \zeta = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}(\zeta) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{w}^{(1)} \\ \mathbf{w}^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} z_{i+2} \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

với $i = 1, 2, 3, 4$ cho hệ (48), tồn tại ánh xạ khả nghịch (21), tức là có

$$\zeta = \Psi(\xi) \Leftrightarrow \xi = \Psi^{-1}(\zeta) = \Phi(\zeta).$$

Cuối cùng, từ ánh xạ khả nghịch này [17] đã xác định được bộ điều khiển phản hồi trạng thái (32)

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = -w_1 \sin x_3 + w_2 \cos x_3 + v_1 x_6^2 \end{cases} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_1 + \varepsilon x_6^2 \\ -\frac{1}{v_1}(w_1 \cos x_3 + w_2 \sin x_3 + 2v_2 x_6^2) \end{pmatrix} \quad (49)$$

và một phép đổi biến vi phôi tương ứng $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6, v_1, v_2)^T \mapsto \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_8)^T$ chuyển hệ PVTOL thành hệ tuyến tính (48).

Quy tắc xác định bộ điều khiển này từ ánh xạ Ψ đã được trình bày trong các tài liệu [10, 17, 21, 22], tức là khi đã có Ψ ta cũng có ngay được bộ điều khiển phản hồi trạng thái và phép đổi biến vi phôi để tuyến tính hóa chính xác được hệ. Nhưng để có được ánh xạ Ψ ta lại phải biết được hệ tuyến tính tương đương Lie-Backlund với hệ phi tuyến phẳng đã cho. Tài liệu [17] đã đưa ngay ra hệ tuyến tính tương đương (48) mà không có một lời giải thích nào, ngay cả một lời gợi ý cũng không có. Nó cứ như là được mò ra vậy. Do đó lại một lần nữa ở đây ta lại thấy được sự cần thiết của lời giải cho bài toán mở số 4.

3.4. Thiết kế tín hiệu điều khiển đầu vào cho bài toán chuyển đổi điểm làm việc

Ứng dụng đơn giản nhất của lý thuyết hệ phẳng là xác định tín hiệu đặt đầu vào $\mathbf{u}(t)$ để đầu ra phẳng $\mathbf{y}(t)$ tương ứng (2) của hệ phẳng

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (50)$$

chuyển đổi từ vị trí \mathbf{y}_0 tới giá trị mong muốn \mathbf{y}_T cho trước. Trình tự xác định tín hiệu điều khiển $\mathbf{u}(t)$ cho bài toán trên gồm các bước như sau

1) Xác định hàm mẫu $\mathbf{y}_m(t)$ thỏa mãn:

- Khả vi ít nhất $q + 1$ lần với q là bậc vi phân trong công thức định nghĩa hệ phẳng (3).

- $\mathbf{y}_m(0) = \mathbf{y}_0$ và $\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{y}_T$ khi $t \geq T$ với khoảng thời gian T có thể cho trước.

2) Xác định tín hiệu điều khiển $\mathbf{u}(t)$ từ $\mathbf{y}_m(t)$ nhờ công thức (3) của hệ phẳng, tức là nhờ $\mathbf{u} = \beta(\mathcal{Y}_{q+1})$, trong đó, như đã trình bày ở công thức (28), \mathcal{Y}_{q+1} là ký hiệu của vector

$$\mathcal{Y}_{q+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_m^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^{(q+1)} \end{pmatrix}.$$

Trong hai bước thiết kế trên, bước 1 là then chốt. Rất có thể ở bước 1 này ta thu được nhiều hàm $\mathbf{y}_m(t)$ thỏa mãn hai tính chất nêu trên. Khi đó cần phải lựa chọn trong số chúng một hàm $\mathbf{y}_m(t)$ cụ thể, để với nó đảm bảo được là tại $\mathbf{u}(t)$ xác định được chỉ có một giá trị ngược duy nhất $\mathcal{Y}_{q+1} = \beta^{-1}(\mathbf{u})$.

Để hỗ trợ việc tìm $\mathbf{y}_m(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$ thỏa mãn hai điều kiện nêu ở bước 1, tài liệu [17] đã giới thiệu nguyên lý khá đơn giản bằng cách thay

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^l a_{ij} \lambda_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (51)$$

có $\lambda_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, l$ là những hàm cơ sở khả vi ít nhất $q + 1$ lần cho trước, thậm chí có thể là các hàm của \mathbf{C}^∞ . Khi đó, với cấu trúc (51) thay thế này, bài toán xác định $\mathbf{y}_m(t)$ chỉ còn là tìm các hệ số a_{ij} để có $\mathbf{y}_m(0) = \mathbf{y}_0$ và $\mathbf{y}_m(T) = \mathbf{y}_T$ với $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_T$ và T là cho trước.

Viết lại (51) thành

$$\mathbf{y}_m(t) = A^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{với } A = (a_{ij}), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

thì từ yêu cầu $\mathbf{y}_m(0) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_m(T) = \mathbf{y}_T$ cũng như mong muốn $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_T$ sẽ còn là các điểm làm việc cân bằng của hệ, ta được

$$\mathbf{Y} = \Lambda A, \quad (52)$$

trong đó

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{q+1}(0) \\ \mathcal{Y}_{q+1}(T) \end{pmatrix} \quad \text{với } \mathbf{y}_m^{(k)}(0) = \mathbf{y}_m^{(T)}(0) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, q + 1$$

và

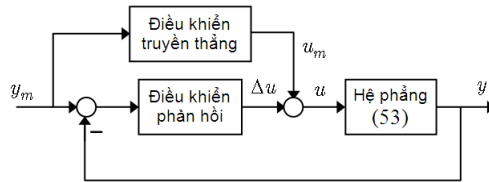
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(0) & \lambda_2(0) & \dots & \lambda_l(0) \\ \lambda_1^{(1)}(0) & \lambda_2^{(1)}(0) & \dots & \lambda_l^{(1)}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{(q+1)}(0) & \lambda_2^{(q+1)}(0) & \dots & \lambda_l^{(q+1)}(0) \\ \lambda_1(T) & \lambda_2(T) & \dots & \lambda_l(T) \\ \lambda_1^{(1)}(T) & \lambda_2^{(1)}(T) & \dots & \lambda_l^{(1)}(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{(q+1)}(T) & \lambda_2^{(q+1)}(T) & \dots & \lambda_l^{(q+1)}(T) \end{pmatrix}.$$

Nghiệm $A = (a_{ji})$ của phương trình (52) là dễ dàng tìm được bằng các thuật toán của đại số tuyến tính kể cả khi Λ bị suy biến, chẳng hạn như với thuật toán Moore-Penrose.

Như vậy, phương trình (52) sẽ có nhiều nghiệm $A = (a_{ji})$, do đó cũng sẽ có nhiều nghiệm $\mathbf{y}_m(t)$. Tuy vậy nghiệm nào trong số đó sẽ thỏa mãn yêu cầu rằng hàm $\mathbf{u} = \beta(\mathcal{Y}_{q+1})$ thu được sau này chỉ có ảnh ngược duy nhất $\mathcal{Y}_{q+1} = \beta^{-1}(\mathbf{u})$ thì vẫn còn bỏ ngỏ. Đó cũng chính là nội dung của bài toán mở số 3 đã được phát biểu ở trên.

3.5. Ứng dụng vào điều khiển bám

Tài liệu [23] giới thiệu một ứng dụng khác của lý thuyết hệ phăng vào bài toán thiết kế bộ điều khiển truyền thẳng (hình H4) để hệ phăng (50) có tín hiệu ra phăng $\mathbf{y}(t)$ bám theo được tín hiệu mẫu $\mathbf{y}_m(t)$ thích hợp cho trước. Đây là bài toán mở rộng hơn của bài toán chuyển đổi điểm làm việc từ $\mathbf{y}_m(0) = \mathbf{y}_0$ tới $\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{y}_T$ mà ta đã xét ở Mục 3.4 trước đây.



Hình 4. Điều khiển bám

Hình 4 mô tả hệ điều khiển bám này, gồm hai bộ điều khiển. Bộ điều khiển phản hồi có nhiệm vụ làm hệ ổn định và bộ điều khiển truyền thẳng là để đầu ra phăng $\mathbf{y}(t)$ của hệ phăng (50) bám theo được tín hiệu mẫu $\mathbf{y}_m(t)$. Tất nhiên rằng hệ không thể điều khiển bám theo được mọi tín hiệu mẫu bất kỳ, do đó tài liệu [23] này cũng chỉ tập trung chủ yếu vào việc xây dựng tín hiệu mẫu cho hệ SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \\ y = g(\mathbf{x}, u), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (53)$$

được ký hiệu là $\mathbf{y}_m(t)$, thỏa mãn:

- Khả vi ít nhất n lần với n là bậc của mô hình (53).
- Đi qua M điểm (t_k, P_k) , $k = 1, 2, \dots, M$ cho trước, trong đó $T = M(\Delta T)$ là khoảng thời gian điều khiển.

- Có các đạo hàm $y_m^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$ là bị chặn theo nghĩa $\|y_m^{(i)}(t)\|_\infty \leq c_i$.

Sau khi đã có $y_m(t)$, bộ điều khiển truyền thẳng ở hình 4 sẽ sử dụng hàm ngược $u_m = \beta(\mathcal{Y}_n)$ của công thức (3) định nghĩa về hệ phẳng để có $u_m(t)$.

Có thể thấy bản chất của bài toán điều khiển bám của tài liệu [23] lại là chuyển về bài toán chuyển đổi điểm làm việc, nhưng cho từng đoạn một, tính từ $y_m(t_k) = P_k$ tới $y_m(t_{k+1}) = P_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$ trong khoảng thời gian ΔT , trong đó bài toán chuyển đổi điểm làm việc đã được giải quyết ở Mục 3.5. Ngoài ra điều kiện $\|y_m^{(i)}(t)\|_\infty \leq c_i$ bổ sung thêm cũng chỉ là để đảm bảo hệ có tín hiệu đầu ra bị chặn, chứ không có ý nghĩa nhiều về bản chất phẳng của hệ (53).

Điểm khác biệt duy nhất của bài toán trong [23] là thay vì bậc trơn $q + 1$ lần của tín hiệu ra phẳng $y_m(t)$ thì nay lại là n lần, đúng bằng bậc mô hình (53). Tuy nhiên ta sẽ thấy ở đây điều kiện đó là tương đương với tính tuyến tính hóa chính xác được của hệ (53) bằng bộ điều khiển tĩnh, thiết kế theo công cụ hình học vi phân [13, 19, 21], vì khi hệ đã có bậc vi phân $q = n - 1$ trong công thức định nghĩa (3) thì với mô hình chuẩn của Isidori [13], nó cũng sẽ có bậc tương đối $r = n$. Bởi vậy, khi đã có $q = n - 1$, hệ (53) sẽ điều khiển tuyến tính hóa chính xác được. Và khi đã điều khiển để trở thành tuyến tính trong toàn bộ không gian trạng thái thì vấn đề tiếp theo là điều khiển bám theo tín hiệu đặt ở đầu vào cho hệ tuyến tính đó sẽ trở nên tầm thường. Nói cách khác nếu hệ phẳng (53) đã có bậc vi phân $q = n - 1$ thì ta hoàn toàn không cần tới lý thuyết hệ phẳng để điều khiển bám cho nó như tài liệu [23] đã làm.

Một điều thừa nữa của bài báo [23] là chỉ xét hệ phẳng (53) có một đầu vào. Theo [5] thì với tất cả các hệ phẳng một đầu vào, ta luôn điều khiển tuyến tính hóa chính xác được bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái tĩnh, cho dù nó có hay không bậc phẳng (bậc tương đối) bằng bậc mô hình. Tức là mọi hệ phẳng (53) SISO đều điều khiển tuyến tính hóa chính xác được mà không làm thay đổi bậc mô hình và do đó đều bám theo được các tín hiệu mẫu bị chặn và không cần phải liên tục (có thể là hằng số từng đoạn), điều mà phương pháp giới thiệu trong [23] không làm được.

4. KẾT LUẬN

Hệ phẳng được xem như là sự mở rộng của lớp các hệ điều khiển tuyến tính hóa chính xác được. Đây là lớp các hệ đã được khảo sát nhiều nhờ công cụ hình học vi phân. Với lớp các hệ điều khiển tuyến tính hóa chính xác được bằng công cụ hình học vi phân này, lý thuyết các hệ phi tuyến cũng đã có bước nhảy vọt mang tính đột phá ở những năm 80-90 của thế kỷ trước [19]. Chính vì vậy người ta đã kỳ vọng ở hệ phẳng cũng có được một bước đột phá tương tự. Minh chứng là khá nhiều các công trình nghiên cứu ứng dụng hệ phẳng đã được công bố, không chỉ riêng trong lĩnh vực điều khiển thuần túy, chẳng hạn như [24, 27] về phát hiện lỗi và [11] về khoa học tính toán xử lý lỗi.

Tuy nhiên, có thể nói là mặc dù nhiều tài liệu gốc nghiên cứu về hệ phi tuyến phẳng như [9–15, 17, 22, 26] đã hứa hẹn khá nhiều khả năng ứng dụng của lý thuyết hệ phẳng trong cả phân tích cũng như điều khiển hệ phi tuyến, song theo ý kiến riêng của tác giả bài báo này thì sự mong đợi nhất ở ứng dụng lý thuyết hệ phẳng ở thời điểm hiện tại chính là điều khiển tuyến tính hóa chính xác hệ phi tuyến bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái động, điều mà các phương pháp khác được xây dựng trên nền hình học vi phân chưa giải quyết được trọn vẹn. Nói như vậy là vì khi so sánh với các lý thuyết điều khiển khác, ta có thể thấy sự tiến bộ của lý thuyết hệ phẳng trong lĩnh vực phân tích và điều khiển là chưa đáp ứng được so với

những lý thuyết không phẳng, điển hình là ở các bài toán phân tích tính ổn định, điều khiển được,... Sự chưa đáp ứng được đó đã được nêu lên ở bảy bài toán mở.

Vậy, để thể hiện được rõ sự vượt trội của lý thuyết hệ phẳng so với các lý thuyết phân tích và điều khiển hệ phi tuyến khác, cần tập trung giải quyết bảy bài toán mở trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. Ailon, Closed form feedback controller for set point and trajectory tracking for the nonlinear model of quadrotor helicopters, *Proceedings of 7th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Denmark, 2012 (375–380).
- [2] E.C. Anene, U.O. Aliyu, J. Levine, and Venayagamoorthy, Flatness-based feedback linearization of a synchronous machine model with static excitation and fast turbine valving, *Power Engineering Society General Meeting* **14** (2005) 1–6.
- [3] F. Antritter, and M. Kletting, Checking robust practical stability for flatness based controllers using interval methods, *Proceedings of 18th World Congress Int. Federation of Automatic Control*, Milano Italy, September 2011 (4632–4637).
- [4] S. Bououden, D. Boutat, J.P. Barbot, and F. Kratz, A geometrical characterization of a class of 0-flat affine dynamical systems, *American Control Conference*, American, June 10-12, 2009 (3989–3994).
- [5] B. Charlet, J. Levine, On dynamic feedback linearization, *Systems Control Letters* **13** (2) (1989) 143–151.
- [6] A. Colombo, and D.D. Vecchio, Supervisory control of differentially flat systems based on abstraction, *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, FL, USA, Dec. 12-15, 2011 (6134–6139).
- [7] J. Dannehl, F.W. Fuchs, Flatness-based voltage oriented control of three phase PWM rectifiers, *Power Electronics and Motion Control Conference*, Poznan, Sept. 1-3, 2008 (444–450).
- [8] I. Fantoni, A. Zavala, and R. Lozano, Global stabization of a PVTOL aircraft with bounded thrust, *Proceedings of 41th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, Dec. 10-13, 2002 (4462–4467).
- [9] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon, Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and applications, *International Journal of Control* **61** (6) (1995) 1327–1361.
- [10] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon, A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44** (5) (1999) 922–937.
- [11] A. Gensior, H.S. Ramfrez, J. Rudolf, and H. Guldner, On some nonlinear current controllers for three phase boost rectifiers, *IEEE Trans. on IE* **56** (2) (2009) 360–370.
- [12] A. Haddad, A. Aitouche, and V. Cocquempot, Fault tolerant control for autonomous vehicle by generating references for rear wheels steering, *Proceeding of 13th IFAC Symposium on Control in Transportation Systems*, Bulgaria, Sept. 2012 (328–333).
- [13] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer Verlag, 1995.
- [14] K.L. Knierim, K. Krieger, and O. Sawodny, Flatness based control of a 3 DOF overhead crane with velocity controlled drives, *5th IFAC Symposium on Mechatronics Systems*, Marriott Boston Cambridge, United States of America, Sept. 2010 (363–368).

- [15] J. Levine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems*, Springer, 2009.
- [16] J. Levine, On necessary sufficient conditions for differential flats, *Journal of Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* **22** (1) (January 2011) 47–90.
- [17] Ph. Martin, R.M. Murray, and P. Roucho, “Flat systems, equivalence and trajectory generation,” Technical report, April 2003.
- [18] D.P. Nam, “Khảo sát khả năng sử dụng nguyên lý phẳng để điều khiển động cơ tuyến tính kiểu đồng bộ kích thích vĩnh cửu” Báo cáo chuyên đề nghiên cứu sinh (2011).
- [19] H. Nijmeijer, A. Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag, 1990.
- [20] N.V. Quang Thành, “Nghiên cứu đề xuất cấu trúc điều khiển bộ chỉnh lưu tích cực theo nguyên lý hệ phẳng”. Đồ án tốt nghiệp ĐH Bách khoa Hà Nội, 2011.
- [21] N.D. Phước, *Phân tích và điều khiển hệ phi tuyến*, Nhà xuất bản Bách khoa, 2012.
- [22] H.S. Ramirez, K.S. Agrawal, *Differentially Flat Systems*, Marcel Dekker, 2004.
- [23] T. Ruppel, K.L. Knierim, and O. Sawodny, Analytical multi point trajectory generation for differentially flat systems with output constraints, *Proceeding of 18th Congress. the Int. Federation of Automatic Control*, Italy, Aug.-Sep., 2011 (950–955).
- [24] V. Stephane, M. Pierrer, and O. Alain, Computation of flat output for fractional systems: A thermal application, *6th Workshop on Fractional Differentiation and its Application*, France, February 2013 (42–47).
- [25] R. Seydou, T. Raissi, A. Zolghadri, and D. Henry, Change detection in flat systems by constraint satisfaction techniques, *18th IFAC Congress*, September 2011 (12009–12014).
- [26] H.L. Trentelman, On flat systems behaviors and observable image representations, *Systems Control Letters* **51** (1) (2004) 51–55.
- [27] N. Zhang, A. Doncescu, A.C. Ramos, and F. Camino, Fault detection for difference flat systems, *Proceedings of Int. Conference of Engineers and Computers Scientists, vol. 2*, IMECS Hong Kong, March, 2012. (938–943).

Ngày nhận bài 19 - 3 - 2013

Nhận lại sau sửa ngày 31 - 7 - 2013